Vertinimo instrukcija

Išplėstinis kursas

I DALIS

1.	43
2.	4
3.	-8
4.	$x_1 = 3; x_2 = -1$
5.	4
6.	4
7.	3
8.	$\frac{27}{8}$, arba $3\frac{3}{8}$ arba $3,375$
9.	60
10.	$\frac{3}{2}$ arba $1\frac{1}{2}$ arba $1,5$

II DALIS

11.1	$(\sqrt{x^2+8x+16})^2 > 10^2 \Rightarrow x^2+8x-84>0$	1 taškas
	Ats.: $x \in (-\infty; -14)$ ir $(6; \infty)$	1 taškas
11.2	$x(x-2) \leqslant 9-2x \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow x \in [-3;3]$	1 taškas
	$\begin{cases} x(x-2)>0 \\ 9-2x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 0)$ ir $(2; 4,5)$ $\Rightarrow Ats.: x \in (2;3]$	1 taškas
11.3	$\sin(2x) < \frac{1}{2} \Rightarrow [t=2x] \Rightarrow \sin(t) < \frac{1}{2}$	1 taškas
	Už nusibrėžtą sinusoidę $y=\sin(t)$ ir $y=\frac{1}{2}$ (galima spręsti ir su vienetiniu apskritimu). Ir gautą $t \in (\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{13\pi}{6}+2\pi k), k \in \mathbf{Z}$	1 taškas
	$2x \in (\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{13\pi}{6}+2\pi k), k \in \mathbf{Z}$ Ats.: $x \in (\frac{5\pi}{12}+\pi k; \frac{13\pi}{12}+\pi k), k \in \mathbf{Z}$	1 taškas
12.1	$F(10) = 2^{3\lg(10)} \cdot 5^{\lg(10)} = 40$	1 taškas
12.2	$2^{3\lg(t)} \cdot 5^{\lg(t)} = 1600 \Rightarrow 8^{\lg(t)} \cdot 5^{\lg(t)} = 1600 \Rightarrow 40^{\lg(t)} = 40^2$ $\Rightarrow \lg(t) = 2 \Rightarrow t = 100$ min	1 taškas
	$100 : 60 = 1\frac{2}{3}$ val	1 taškas

13.	$[n = \frac{\pi}{2} - m] \Rightarrow \sin(m) + \cos(\frac{\pi}{2} - m) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(m) = \frac{1}{4}$	1 taškas
	$\sin^2(m) + \cos^2(m) = 1 \Rightarrow \cos^2(m) = \frac{15}{16}$ ir $\sin^2(m) = \frac{1}{16}$	1 taškas
	$tg^2(m) = \frac{\sin^2(m)}{\cos^2(m)} \Rightarrow Ats.: tg^2(m) = \frac{1}{15}$	1 taškas
14.	x - mažiausias kampas, $x + 2x + ... + nx = 180°(n-2)$ $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}x = 180°(n-2) \Rightarrow nx = \frac{2 \cdot 180°(n-2)}{n+1}$	1 taškas
	$nx < 180° \Rightarrow \frac{2 \cdot 180°(n-2)}{n+1} < 180° \Rightarrow n < 5 \Rightarrow Ats.: n = 3$	1 taškas
15.1	*(Pasižymime didesnįjį pagrindą raidėmis ABC ir iš A į* *BC išvedame aukštinę AF, su centru O.)* $CF = 9 : 2 = 4,5$ cm $\Rightarrow AF = \sqrt{9^2 - (4,5)^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AF = 3\sqrt{3}$ cm	1 taškas
	(Pasižymime mažesnįjį pagrindą raidėmis $A_1B_1C_1$ ir iš A_1 į *B_1C_1 išvedame aukštinę A_1F_1, su centru O_1.)* $C_1F_1 = 6 : 2 = 3$ cm $\Rightarrow A_1F_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow A_1O_1 = \frac{2}{3}A_1F_1 = 2\sqrt{3}$ cm	1 taškas
	(Nagrinėjame plokštumą AA_1O_1O, kuri yra stačioji trapecija. *Joje iš A_1 į AO išvedame aukštinę A_1E.)* $AE = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AA_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{19}$ cm	1 taškas
	(Nagrinėjame piramidės sieną CC_1B_1B, ji yra lygiašonė trapecija *($CC_1 = BB_1$). Iš taško C_1 į briauną CB išvedame aukštinę C_1D.)* $CD = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2}$ cm $\Rightarrow Ats.: C_1D = \sqrt{(\sqrt{19})^2 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{67}}{2}$ cm	1 taškas
15.2	*(Nagrinėjame piramidės sieną AA_1C_1C. Iš taško C_1 į* *briauną AC išvedame aukštinę C_1D_1.)* $AD_1 = 9 - \frac{3}{2} = 7,5$ cm $\Rightarrow AC_1 = \sqrt{(7,5)^2 + (\frac{\sqrt{67}}{2})^2} = \sqrt{73}$ cm	1 taškas
	(Nagrinėjame pjūvį AB_1C_1.) $AF_1 = \sqrt{(\sqrt{73})^2 - 3^2} = 8$	1 taškas
	Ats.: $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ cm^2	1 taškas
15.3	*(Nagrinėjame kampą $\angle F_1AF$.)* $\sin(\angle F_1AF) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ *(galima ir ne su sinusu).*	1 taškas
	Ats.: $\angle F_1AF = \frac{\pi}{6} = 30°$	1 taškas

16.1	$f'(x) = -4\sin(2x)$	1 taškas
	$f'(x_0) = f'(0) = -4\sin(0) = 0$; $f(x_0) = f(0) = 2\cos(0) = 2$ $\Rightarrow Ats.: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2$	1 taškas
16.2	Už teisingai rastus rėžius. $2\cos(2x) = 2\sin(2x) \Rightarrow tg(2x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$ $2cos(2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$	1 taškas
	$\mathrm{S}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} 2 - 2\cos(2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2 - 2\sin(2x)\,dx =$ $(2x - \sin(2x))\Big\vert_0^{\frac{\pi}{8}} + (2x + \cos(2x))\Big\vert_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$	1 taškas
	$\mathrm{S}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} 2\sin(2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)\,dx =$ $(-\cos(2x))\Big\vert_0^{\frac{\pi}{8}} + (\sin(2x))\Big\vert_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} + 2$	1 taškas
	$S_2 - S_1 = -\sqrt{2} + 2 - (\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = 2 - \frac{\pi}{2}$	1 taškas
17.1	Išrenkame 6 merginas: $C_9^6 = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84$	1 taškas
	Išrenkame 6 vaikinus: $C_7^6 = \frac{7!}{6!} = 7$	1 taškas
	Mergina gali šokti su bet kuriuo išrinktu vaikinu: $6! = 720$ Visi skirtingi būdai: $C_9^6 \cdot C_7^6 \cdot 6! = 423360$	1 taškas
17.2	Fiksuojam 1 porą Toma ir Lukas: 1 pasirinkimas. Išrenkame likusias 5 merginas: $C_8^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 8 \cdot 7 = 56$	1 taškas
	Išrenkame likusius 5 vaikinus: $C_6^5 = \frac{6!}{5!} = 6$	1 taškas
	Mergina gali šokti su bet kuriuo iš 5 išrinktų vaikinų: $5! = 120$ A - viena iš išrinktų 6 porų bus Toma ir Lukas. $m = C_8^5 \cdot C_6^5 \cdot 5! = 40320$	1 taškas
	$n = 423360$ Ats.: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{40320}{423360} = \frac{2}{21}$	1 taškas
18	$S_{3n} = \frac{b_1(1-q^{3n})}{1-q}$; $S_{2n} = \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q}$ $S_{2n} - S_n = \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(q^n-q^{2n})}{1-q} = \frac{b_1q^n(1-q^n)}{1-q}$	1 taškas
	$(S_{2n} - S_n)^2 = (\frac{b_1q^n(1-q^n)}{1-q})^2 = \frac{b_1^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2}$	1 taškas
	$\frac{(S_{2n}-S_n)^2}{S_n} = \frac{b_1^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2} : \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} =$ $\frac{b_1^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2} \cdot \frac{(1-q)}{b_1(1-q^n)} = \frac{b_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q}$	1 taškas
	$\frac{(S_{2n}-S_n)^2}{S_n} + S_{2n} = \frac{b_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q} + \frac{b_1(1-q^{2n})}{1-q} = \frac{b_1q^{2n}(1-q^n)+b_1(1-q^{2n})}{1-q} =$ $\frac{b_1(1-q^{3n})}{1-q} = S_{3n}$ Vadinasi, $S_{3n} = \frac{(S_{2n}-S_n)^2}{S_n} + S_{2n} = \frac{(b-a)^2}{a} + b.$	1 taškas

19.1	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$	1 taškas
	$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ Ats.: $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$	1 taškas
19.2	$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}AB \Rightarrow DB = AB - \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}AB$	1 taškas
	$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$	1 taškas
	$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ Ats.: $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$	1 taškas
20	$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) + ... + 2(x-a) =$ $2x - 2 + 2x - 4 + 2x - 6 + ... + 2x - 2a =$ $2xa - 2(1+2+3+...+a) = 2xa - 2(\frac{(1+a)a}{2}) = 2xa - a(1+a)$	1 taškas
	$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xa - a(1+a) = 0 \Rightarrow x = \frac{1+a}{2}$	1 taškas
	$a < 2025, a \in \mathbf{N}$ Kai $a = 2024 \Rightarrow x = \frac{1+2024}{2} = 1012,5 \notin \mathbf{N}$ (Netinka) Kai $a = 2023 \Rightarrow x = \frac{1+2023}{2} = 1012 \in \mathbf{N}$ Kai $a = 2022 \Rightarrow x = \frac{1+2022}{2} = 1011,5 \notin \mathbf{N}$ (Netinka, taip pat x reikšmės pradeda mažėti $1012 > 1011,5 > ...$) $x = 1012$, kai $a = 2023$	1 taškas
	Funkcija $f(x)$, kai $a = 2023$, intervale $x \in (-\infty; 1012)$ leidžiasi, o $x \in (1012; \infty)$ - auga. Vadinasi $x = 1012$ yra minimumas. Ats.: $x = 1012$	1 taškas