Tikimybių teorijos konspektas abiturientams

2025-04-11, Vytautas Miežys, versija 1.1

bit.ly/tikimybiuTeorijosKonspektas

Šiame konspekte apžvelgiamas mokyklinis tikimybių teorijos kursas pagal atnaujintą programą. Vienoje vietoje šis konspektas truputį išeina iš mokyklinės programos ribų (trumpai aptariama sąlyginė tikimybė). Tačiau sąlyginė tikimybė pristatoma tik tam, kad prasmingai galėtų būti apibrėžta mokyklinė sąvoka – nepriklausomi įvykiai. Konspekte gali būti likę klaidų. Jei jų radote, parašykite. Taip pat galite pasitikrinti, ar turite naujausią šio konspekto versiją.
Konspektas parengtas naudojant V. Stakėno vadovėlį „Tikimybių mokslo pagrindai“ (2010, 262 p., VU leidykla), kurį rekomenduoju tiems skaitytojams, kam šio konspekto maža. Minėto vadovėlio rankraštis nemokamai pasiekiamas internete.

Turinys

1. Pagrindinės sąvokos

1.1. Bandymas ir jo baigtys

(1) Bandymas – kažkas, ką galime kartoti kiek norime kartų ir iš anksto nežinome, kaip tas kažkas, ką kartosime, pasibaigs. Kai norima pabrėžti, kad kalbame apie tikimybinį bandymą, o ne fizikinį ar dar kokį, sakome „**stochastinis** bandymas“ (gr. *stochasis* – nuspėjimas, numatymas). Įvardindami bandymą turime nusakyti du dalykus: (1) ką atliekame; (2) ką stebime.

(2) Pavyzdys. Pasakydami „Metame standartinį šešiasienį kauliuką“ arba „Metame standartinę monetą“ neįvardijame stochastinio bandymo. Turime taip pat įvardyti, ką stebime, pvz.:

- „Metame standartinį šešiasienį kauliuką ir stebime, keliomis akutėmis kauliukas atvirsta“,
- „Metame standartinį šešiasienį kauliuką ir stebime, ar atvirto lyginis akučių skaičius“,
- „Metame standartinę monetą ir stebime, kuria puse ji atvirto“,
- „Metame standartinę monetą ir stebime, per kiek laiko moneta nustos judėti“.

(3) Bandymą tyrinėjame visų pirma įvardindami **bandymo baigčių aibę**, t. y. išvardindami visas galimybes, kaip bandymas gali baigtis. Bandymo baigčių aibę žymime didžiąja graikų abėcėlės raide Ω (skaitome: omega). Pačias baigtis įprasta žymėti mažosiomis omega raidėmis su indeksais: $\omega_1, \omega_2, \ldots$

(4) Pavyzdys. Keli bandymų ir jų baigčių aibių pavyzdžiai:

1. Metama standartinė moneta ir stebima, kuria puse ji atvirs. Tuomet $\Omega = \{\text{herbas}, \ \text{skaičius}\}$ arba $\Omega = \{H, S\}$.
2. Metamos trys monetos ir stebima, kuria puse kiekviena atvirs. Tuomet $\Omega = \{HHH, HHS, HSH, SHH, HSS, SHS, SSH, SSS\}$.
3. Nemokyklinis. Metame monetą tol, kol iškrenta skaičius. Tuomet $\Omega = \{S, HS, HHS, HHHS, HHHHS, \ldots\}$.
4. Nemokyklinis. Sulaukiame SMS žinutės ir skaičiuojame laiką iki kitos. Tuomet $\Omega = (0, +\infty)$.

1.2. Įvykiai

(5) Apibrėžtis. Bandymo baigčių aibės poaibis vadinamas to bandymo **įvykiu.** Įvykius įprasta apibūdinti žodžiais.

(6) Pavyzdys. Jei $\Omega = \{HH, HS, SH, SS\}$, tai aibės $A = \{HS, SH, SS\}, B = \{HH\}$ yra šio bandymo įvykiai, kadangi $A \subset \Omega, B \subset \Omega$. Apibūdinkime šiuos įvykius: A – iškrito bent vienas skaičius; B – iškrito abu herbai.

(7) Apibrėžtis. Jei ω yra tam tikro bandymo baigtis, tai aibė $\{\omega\}$ yra vadinama **elementariuoju įvykiu**.

(8) Pastaba. Bandymo **baigtis nėra įvykis**. Tarkime, $\Omega = \{H, S\}$. Tuomet H yra Ω elementas ($H \in \Omega$), bet H nėra Ω poaibis ($H \not\subset \Omega$, $\{H\} \subset \Omega$). Jei kalbant ūkiškai, tai skirtumas tarp H ir $\{H\}$ yra toks kaip skirtumas tarp apelsino ir apelsino maišelyje. Viena vertus skirtumo nėra – abiem atvejais kalbame apie apelsiną. Kita vertus skirtumas yra – vienas apelsinas maišelyje, o kitas šiaip – be maišelio. Vėliau išsiaiškinsime, kad matematikoje taip jau reikalai susidėliojo, kad kalbame tik apie *įvykių* tikimybes, taigi baigtys privalo būti „maišelyje“, o ne šiaip paskiros. Kadangi skirtumas tarp bandymo baigties ir elementariojo įvykio yra toks neryškus, vadovėliuose ir netgi pačioje programoje elementariojo įvykio sąvoka dažnai painiojama su bandymo baigties. Elementariojo įvykio sąvokos, mano galva, mokyklinėje tikimybių teorijoje apskritai galėtų nebūti. Būtų mažiau painiavos, o pati teorija tikrai nenuskurstų.

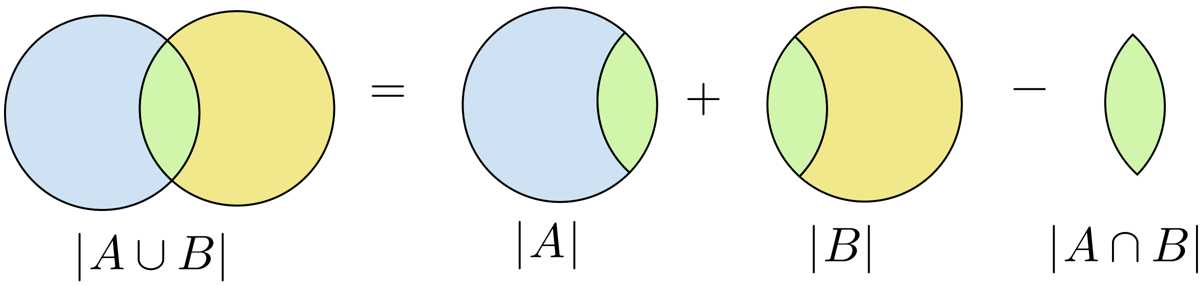
(9) Jei bandymo baigtis HH priklauso įvykiui B ($HH \in B$), tai sakome, kad ši **baigtis** yra įvykiui B **palanki**. Jei $HH \notin A$, tai sakome, kad baigtis įvykiui A **nėra palanki**. Jei atlikus bandymą jis baigėsi baigtimi HH, tai sakome, kad **įvyko įvykis** B ir **neįvyko** įvykis A.

(10) Jei atliekant bandymą įvykis A gali įvykti arba gali neįvykti, tai sakome, kad toks įvykis yra **atsitiktinis.** Jei atliekant bandymą įvykis negali įvykti, tai sakome, kad jis yra **negalimasis**. Toks įvykis yra tuščioji aibė $\emptyset$. Jei įvykis būtinai įvyksta, tai sakome, kad jis yra **būtinasis**. Toks įvykis yra visa bandymo baigčių aibė Ω.

(11) Tarkime turime kažkokį bandymą su tam tikra baigčių aibe Ω ir nagrinėjame tam tikrą įvykį A ($A \subset \Omega$). Įvykį, sudarytą iš baigčių, nepalankių įvykiui A, vadinsime įvykiui A **priešingu įvykiu** ir žymėsime $\overline{A}$.

(12) Tarkime, A ir B yra du to paties bandymo įvykiai. Jei egzistuoja baigtis, palanki abiems įvykiams, tai sakome, kad šie įvykiai yra **sutaikomieji**. Priešingu atveju – sakome, kad įvykiai yra **nesutaikomieji**, t. y. jei $A \cap B \neq \emptyset$, tai A, B – sutaikomieji; jei $A \cap B = \emptyset$, tai A, B – nesutaikomieji.

(13) Teiginys. Tegul A, B – bet kokios baigtinės aibės. Tuomet $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, čia $|T|$ žymi elementų skaičių aibėje T.
Įrodymas.



(14) Pavyzdys. Tegul $A = \{1, 2, 3\}$, o $B = \{3, 4\}$. Tuomet $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. Jei rašytume $|A \cup B| = |A| + |B|$, tai elementą, priklausantį abiejom aibėm (3) priskaičiuotume du kartus. Negerai. Dėl to rašome $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ tokiu būdu užtikrindami, kad tai, ką dukart pridėjome, vieną kartą būtų atimta. Tuomet

$$\begin{aligned} |\{1,2,3\} \cup \{3,4\}| &= |\{1,2,3\}| + |\{3,4\}| - |\{1,2,3\} \cap \{3,4\}| \\ &= |\{1,2,3\}| + |\{3,4\}| - |\{3\}| \\ &= \quad 3 \quad + \quad 2 \quad - \quad 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(15) Pastaba. Jei A, B – nesutaikomieji įvykiai, t. y. $A \cap B = \emptyset$, tai $|A \cup B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cap B|}_{=0} = |A| + |B|$.

1.3. Tikimybė

(16) Apibrėžtis. Tegul Ω yra bandymo baigčių aibė. Funkcija P, priskirianti kiekvienam įvykiui (Ω poaibiui) skaičių iš intervalo $[0; 1]$, ir turinti dar kelias savybes (mums dabar nelabai svarbias), yra vadinama šio bandymo tikimybiniu matu. Jei A yra tam tikras įvykis (t. y. $A \subset \Omega$), tai skaičius $P(A)$ yra vadinamas **įvykio** A **tikimybe**.

(17) Pastaba. Kadangi bandymo baigtis nėra įvykis, tai **neegzistuoja bandymo baigties tikimybė**. Taigi jei $\Omega = \{H, S\}$, tai užrašas $P(H)$ neturi prasmės, kadangi H nėra įvykis. Prasmę turi užrašas $P(\{H\})$. Bet kadangi jis estetiškai labai nemalonus, neretai vis tiek rašoma $P(H)$, bet tuomet šie simboliai perteikia simbolių $P(\{H\})$ prasmę.

(18) Apibrėžtis. Jei bandymo baigčių aibė Ω yra baigtinė ir visos bandymo baigtys yra vienodai galimos, tai tokį bandymą vadiname **klasikiniu**, o įvykio A tikimybe vadiname skaičių $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

(19) Pavyzdys. Metamas standartinis šešiasienis kauliukas. Bandymo baigčių aibė $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kadangi visos baigtys vienodai galimos, bandymas yra klasikinis. Tuomet jei A – „iškrito pirminis skaičius akučių“, tai šio įvykio tikimybė yra $P(A) = P(\{2, 3, 5\}) = \dfrac{|\{2, 3, 5\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$.

(20) Pavyzdys. Metami du standartiniai šešiasieniai kauliukai ir stebima atvirtusių akučių suma. Bandymo baigčių aibė $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$. Kadangi bandymo baigtys nėra vienodai galimos, tai šis bandymas **nėra klasikinis** ir įvykių tikimybių įprastai skaičiuoti negalime. Pakeiskime tai, ką bandyme stebime. Vietoje atvirtusių akučių sumos stebime, keliomis akutėmis atvirto pirmasis ir antrasis kauliukai. Tuomet $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$. Kadangi visos baigtys vienodai galimos, bandymas klasikinis, galime skaičiuoti įvykių tikimybes. Tuomet patogu įvesti atsitiktinį dydį (apie juos žemiau) X – iškritusių akučių suma ir tokiu būdu tyrinėti norimą situaciją.

(21) Teiginys. Jei bandymas klasikinis, tai teisingi šie teiginiai:

1. Kiekvienam įvykiui A teisinga, kad $P(A) \in [0; 1]$;
2. $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$;
3. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Įrodymas. Teiginių teisingumas išplaukia beveik tiesiogiai iš apibrėžčių.

(22) Teiginys (sutaikomųjų įvykių sumos formulė). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Įrodymas. Teiginys išplaukia praktiškai tiesiogiai iš tapatybės $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} + \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pastaba: ši formulė teisinga ir tuomet, kai įvykiai nesutaikomieji, tik tuomet $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ ir tada gauname $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Sąlyginė tikimybė ir nepriklausomi įvykiai

(23) Nagrinėkime tokį bandymą: du kartus metame standartinę monetą ir stebime, kuria puse atvirs moneta pirmą ir antrą kartą. Tarkime, mums rūpi, ar įvyks įvykis A – „atvirto bent vienas herbas“. Kadangi $\Omega = \{HH, HS, SH, SS\}$, o $A = \{HH, HS, SH\}$, tai $P(A) = \frac{3}{4}$. Kol kas viskas labai paprasta.

(24) Dabar įsivaizduokime, kad šį bandymą atlieka mūsų draugas, nuo kurio mes esame nusisukę. Atlikęs bandymą jis mums paslaptingai sako: „Galiu pasakyti tik tiek, kad bent viena moneta atvirto skaičiumi.“ Iš jo žinutės suprantame, kad įvyko įvykis $B = \{HS, SH, SS\}$, tačiau nežinome, kuria tiksliai baigtimi bandymas baigėsi. Ar šios žinios pakeičia įvykio A tikimybę? Taip. Kadangi žinome, jog įvyko viena iš baigčių HS, SH arba SS ir visos trys jos vienodai galimos, o mums iš jų palankios tik dvi (HS ir SH), tai dabartinė įvykio A tikimybė yra lygi $\dfrac{\text{palankių baigčių sk.}}{\text{visų baigčių sk.}} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{|\{HS, SH\}|}{|\{HS, SH, SS\}|} = \dfrac{2}{3}$.

(25) Žinoma, neteisinga būtų rašyti, $P(A) = \frac{2}{3}$, kadangi lengvai galėtume susipainioti su pradine įvykio A tikimybe $P(A) = \frac{3}{4}$. Dėl to reikalinga nauja apibrėžtis ir pažymėjimas.

(26) Apibrėžtis (netiksli). Tarkime, kad A ir B yra du su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai ir $P(B) > 0$. Įvykio A **sąlygine tikimybe** su sąlyga, kad įvyko įvykis B, vadinsime tikimybę, kad įvyks įvykis A, žinant, kad įvyko įvykis B. Šią tikimybę žymėsime simboliais $P(A|B)$, o ji lygi $P(A|B) = \dfrac{|A \cap B|}{|B|}$.

(27) Pastaba. Universitetiniuose vadovėliuose ši teorija pristatoma kiek kitaip. Visgi pirmam susipažinimui su šiomis sąvokomis, manau, toks pristatymas, kaip pateikiu čia, yra optimalus.

(28) Grįžkime prie monetų mėtymo. Dabar jau galime tiksliau užrašyti: $P(A) = \frac{3}{4}$, o $P(A|B) = \frac{2}{3}$. Matome, kad įvykio B įvykimas pakeitė įvykio A tikimybę. Ar visuomet taip bus?

(29) Tarkime, nagrinėjame tą patį bandymą ir dabar C – „abi monetos atvirto vienodai“, D – „pirmoji moneta atvirto skaičiumi“. Tuomet $C = \{HH, SS\}, D = \{SH, SS\}$. $P(C) = \frac{1}{2}$. Tarkime, kad sužinome, jog įvyko įvykis D. Tuomet įvykio C sąlyginė tikimybė yra lygi $P(C|D) = \frac{|C \cap D|}{|D|} = \frac{|\{SS\}|}{|\{SH, SS\}|} = \frac{1}{2} = P(C)$. Matome, įvykio C tikimybė yra tokia pati kaip įvykio C tikimybė žinant, kad įvykis D įvyko. Taigi kartais vieno įvykio įvykimas pakeičia kito įvykio tikimybę, o kartais nepakeičia. Svarbus dar ir toks pastebėjimas:

(30) Teiginys. Jei įvykio D įvykimas nepakeičia įvykio C tikimybės, tai ir įvykio C įvykimas nepakeis įvykio D tikimybės, t. y. jei $P(C) = P(C|D)$, tai ir $P(D) = P(D|C)$.
Įrodymas (nebūtina nagrinėti). Kadangi $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|}$, o $P(C|D) = \frac{|C \cap D|}{|D|}$ ir $P(C) = P(C|D)$, tai $\frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{|C \cap D|}{|D|}$. Abi puses padauginkime iš $|D|$, padalykime iš $|C|$, o $|C \cap D|$ perrašykime kaip $|D \cap C|$. Tuomet gauname $\frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|D \cap C|}{|C|} \Longrightarrow P(D) = P(D|C)$.

(31) Apibrėžtis. Tegul A ir B yra du su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai ir $P(A) > 0, P(B) > 0$. Jei įvykio B įvykimas nepakeičia įvykio A tikimybės (t. y. $P(A) = P(A|B)$), tai sakysime, kad **įvykiai** A ir B yra **nepriklausomi**. Priešingu atveju sakysime, kad įvykiai yra priklausomi.
Pastaba: svarbu atkreipti dėmesį, kad iš lygybės $P(A) = P(A|B)$ išplaukia $P(B) = P(B|A)$, taigi įvykiai iš tiesų vienas nuo kito nepriklauso, t. y. nėra taip, kad įvykis A nuo B nepriklauso, o B nuo A galbūt priklauso.

Uždaviniuose svarbus šis teiginys:

(32) Teiginys. Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ir atvirkščiai – jei $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, tai A ir B – nepriklausomi.
Įrodymas (nebūtina nagrinėti). Nagrinėkime nepriklausomų įvykių porą A ir B. Tuomet $P(A) = P(A|B) \Longrightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \Longrightarrow |B| \cdot \frac{|A|}{|\Omega|} = |A \cap B|$. Padalįję abi puses iš $|\Omega|$ gauname $\frac{|B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \Longrightarrow P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B)$. Pirma teiginio dalis įrodyta.
Dabar nagrinėkime įvykių A ir B porą tokią, kad teisinga lygybė $P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B)$. Iš jos turime $\frac{|B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$. Abi puses padauginę iš $|\Omega|$ ir padalįję iš $|B|$ gausime $\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \Longrightarrow P(A) = P(A|B)$.

(33) Pavyzdys. Tarkime, $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B) = 0{,}7$. Nustatykime, ar A ir B nepriklausomi. Bet kuriai įvykių porai A, B teisinga lygybė $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Įstatykime žinomas reikšmes: $0{,}7 = 0{,}3 + 0{,}6 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}18$. Jei įvykiai būtų nepriklausomi, būtų teisinga lygybė $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$, tačiau taip nėra. Vadinasi, įvykiai nėra nepriklausomi.

3. Atsitiktinis dydis

(34) Bandymo baigtys dažniausiai nėra patogūs matematiniai objektai. Pvz., jei $\Omega = \{HH, HS, SH, SS\}$, tai objektų HH, HS, SH ir SS nei sudėsi, nei atimsi, nei padauginsi, nei kvadratu pakelsi, nei kokios Pitagoro teoremos pritaikysi. Vadinasi, viso įprasto mums matematinio arsenalo panaudoti jų tyrimui negalime. Nepatogu.

(35) Nepaisant to, kad bandymo baigtys nėra matematiniai objektai, į juos galima žvelgti kiekybiškai, t. y. bandymo baigtyse matyti tam tikrus skaičius, pvz. apie bandymo baigtį HH galime sakyti „Atvirto du herbai“, o apie baigtį SH – „Herbas atvirto vienąkart“. Taip žvelgdami į bandymo baigtis apie patį bandymą galime kelti prasmingus klausimus: „Kaip dažnai atvirs du herbai?“, „Kaip dažnai atvirs bent vienas herbas?“ arba „Kiek vidutiniškai herbų atvirs metus dvi monetas 10 kartų?“. Taigi pakeitę bandymo baigtis skaičiais, galime ir išspręsti problemą, kad bandymo baigtys nėra patogūs matematiniai objektai, ir įgyti naujų prasmingų įžvalgų apie pačius bandymus. Tam matematikai sugalvojo atsitiktinio dydžio sąvoką, kuri bandymo baigtis pakeičia skaičiais.

(36) Apibrėžtis. Tegul Ω yra tam tikro bandymo baigčių aibė. Funkciją $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (funkcija X kiekvienai bandymo baigčiai (ne įvykiui!) priskiria tam tikrą skaičių) vadinsime **atsitiktiniu dydžiu** (trumpinsime a. d.).

(37) Pavyzdys. Tarkime $\Omega = \{HH, HS, SH, SS\}$. Funkciją X apibrėžkime tokiu būdu: $X(HH) = 2, X(HS) = X(SH) = 1, X(SS) = 0$. Tuomet X – atsitiktinis dydis, kadangi kiekvienai baigčiai priskyrė po skaičių. Galima tokio priskyrimo interpretacija: X – atvirtusių herbų skaičius.

(38) Galima kelti klausimą, kokia tikimybė, kad įvykus bandymui atsitiktinis dydis įgys tam tikrą reikšmę. Pvz. kokia tikimybė, kad ankstesnio bandymo ir a. d. kontekste turėsime $X(\omega) = 1$, t. y. kad herbas atvirs vieną kartą. Kadangi tikimybes skaičiuojame įvykių, t. y. aibės Ω poaibių, tai galėtume užrašyti $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\})$, čia simboliai $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}$ žymi aibę tokių baigčių, su kuriomis teisinga lygybė $X(\omega) = 1$. Vietoj tokio gana nepatogaus užrašo susitarta rašyti tiesiog $P(X = 1)$. Taigi $P(X = 1) = P(\{SH, HS\}) = \frac{1}{2}$. Panašiai $P(X \neq 2) = P(X < 2) = P(X \leqslant 1) = P\big(X = 0 \text{ arba } X = 1\big) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Taip rašyti nebūtina, bet pavyzdys vaizdžiai parodo, kaip galima naudoti žymėjimus.

(39) Apibrėžtis. Atsitiktinio dydžio skirstiniu vadinsime lentelę, kurios pirmojoje eilutėje užrašysime visas galimas a. d. reikšmes, o antrojoje – atitinkamas tikimybes.

(40) Jau nagrinėto a. d. X skirstinys:

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(41) Teiginys. Jei a. d. įgyja X reikšmes $x_1, x_2, \dots, x_n$ atitinkamai su tikimybėmis $p_1, p_2, \dots, p_n$, tai $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.
Įrodymas. Paprasta šį teiginį suprasti tiesiog iš pavyzdžių, bet jei norisi kažko truputį formalesnio, štai:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_n &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) \\ &= P\big(X = x_1 \text{ arba } X = x_2, \text{ arba } \dots, \text{ arba } X = x_n\big) \\ &= P(X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \\ &= P(X \in E_X) \end{aligned}$$

Čia E_X žymi a. d. X reikšmių aibę. Gavome, kad suma $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ yra lygi tikimybei, jog atsitiktinis dydis įgys kažkurią reikšmę. Bet kuris bandymas baigsis tam tikra baigtimi, o a. d. X kiekvienai bandymo baigčiai priskiria tam tikrą reikšmę, taigi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = P(X \in E_X) = 1$.

3.1. Atsitiktinio dydžio vidurkis (matematinė viltis) ir dispersija

(42) Žaidžiame žaidimą. Metame standartinį šešiasienį kauliuką ir stebime keliomis akutėmis jis atvirs. Tuomet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jei iškrenta 6, laimime 12 eurų, kitu atveju pralaimime 3 eurus. Tegul X – išlošis po tokios loterijos. Tuomet $P(X = 12) = \frac{1}{6}$, $P(X = -3) = \frac{5}{6}$. Ar apsimoka žaisti?

(43) Į šį klausimą galėtume bandyti atsakyti taip: jei žaistume labai daug kartų, išloštume galų gale, ar ne? Tarkime, šį žaidimą sužaidžiame 600 kartų. Tikėtina, kad maždaug $\frac{1}{6}$-ąją šių žaidimų išloštume 12 eurų, o $\frac{5}{6}$-ąsias žaidimų – praloštume 3. Taigi tikėtinas mūsų išlošis po 600 žaidimų yra lygus: $\frac{1}{6} \cdot 600 \cdot 12 + \frac{5}{6} \cdot 600 \cdot (-3) = 1200 + (-1500) = -300$. Matome, kad lošti neapsimoka.

(44) Galime apskaičiuoti ir tikėtiną vieno žaidimo išlošį. Tarkime, kad žaidžiame n žaidimų (tebūnie n yra kažkoks didelis skaičius). Tuomet vidutinis išlošis yra lygus $\left(\frac{1}{6} \cdot n \cdot 12 + \frac{5}{6} \cdot n \cdot (-3)\right) : n = \frac{1}{6} \cdot 12 + \frac{5}{6} \cdot (-3) = -0{,}5$. Matome, kad gavome nuo n nepriklausančią išraišką. Šios mintys yra pagrindas tokiai apibrėžčiai:

(45) Apibrėžtis. Atsitiktinio dydžio X vidurkis (matematinė viltis) yra skaičius, kurį žymėsime $\mathbf{E}X$, ir jis lygus $\mathbf{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$, čia $x_1, x_2, \dots, x_n$ – a. d. X reikšmės, $p_1, p_2, \dots, p_n$ – tų reikšmių tikimybės.

(46) Pastaba. Raidę **E** patogu sieti su ang. žodžiais *expectation*, *expected value.*

(47) Natūralu, kad du skirtingi atsitiktiniai dydžiai gali turėti tą patį vidurkį. Pvz. jei turime a. d. X ir Y, kurių skirstiniai yra

x	-1	1
$P(X = x)$	0,5	0,5

y	-20	-10	10	20
$P(Y = y)$	0,25	0,25	0,25	0,25

Tai $\mathbf{E}X = (-1) \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$ ir $\mathbf{E}Y = (-20) \cdot 0{,}25 + (-10) \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}25 + 20 \cdot 0{,}25 = 0$. Tačiau šie a. d. tikrai kažkuo skiriasi. Kuo? Tuo, kad a. d. X reikšmės bus „išsibarsčiusios“ žymiai arčiau vidurkio negu Y reikšmės. Kaip tą išmatuoti? Naudojant dispersiją bei standartinį nuokrypį. Matuosime vidutinį kvadratinį atstumą nuo vidurkio (dispersija), o tuomet trauksime iš jo šaknį (standartinis nuokrypis).

(48) Apibrėžtis. Atsitiktinio dydžio X dispersija yra skaičius, kurį žymėsime $\mathbf{D}X$, ir jis lygus $\mathbf{D}X=(x_1-\mathbf{E}X)^2p_1+(x_2-\mathbf{E}X)^2p_2+\ldots+(x_n-\mathbf{E}X)^2p_n$, čia $x_1,x_2,\ \ldots,x_n$ – a. d. X reikšmės, $p_1,p_2,\ \ldots,p_n$ – tų reikšmių tikimybės. Skaičių $\sqrt{\mathbf{D}X}$ vadinsime a. d. X standartiniu nuokrypiu arba vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu, o žymėsime $\sigma(X)$ (σ – skaitome: sigma).

(49) Pavyzdys. Apskaičiuokime aukščiau apibrėžtų a. d. X ir Y dispersijas bei standartinius nuokrypius. Jau žinome, kad $\mathbf{E}X=\mathbf{E}Y=0$, tuomet

$$\begin{aligned}\mathbf{D}X &= (x_1-\mathbf{E}X)^2p_1 + (x_2-\mathbf{E}X)^2p_2\\ &= ((-1)-0)^2\cdot 0{,}5 + (1-0)^2\cdot 0{,}5\\ &= 0{,}5 + 0{,}5\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{D}X}=\sqrt{1}=1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}Y &= (y_1-\mathbf{E}Y)^2p_1 + (y_2-\mathbf{E}Y)^2p_2 + (y_3-\mathbf{E}Y)^2p_3 + (y_4-\mathbf{E}Y)^2p_4\\ &= ((-20)-0)^2\cdot 0{,}25 + ((-10)-0)^2\cdot 0{,}25 + (10-0)^2\cdot 0{,}25 + (20-0)^2\cdot 0{,}25\\ &= 400\cdot 0{,}25 + 100\cdot 0{,}25 + 100\cdot 0{,}25 + 400\cdot 0{,}25\\ &= 250\end{aligned}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{\mathbf{D}Y}=5\sqrt{10}\approx 15{,}8$$

(50) Pastaba. Išsamesnis dispersijos ir standartinio nuokrypio komentaras galbūt pasirodys ateityje.

4. Bernulio bandymai ir binominis atsitiktinis dydis

(51) Apibrėžtis. Jei bandymo baigčių aibę sudaro lygiai du elementai, tai tokį bandymą vadiname **Bernulio bandymu** (Jacob Bernoulli, XVII a. šveicarų matematikas).

(52) Pavyzdys. Bernulio bandymai:
- Standartinės monetos metimas, kadangi $\Omega=\{H,S\}$.
- Krepšininkas meta kamuolį į krepšį ir stebime, ar jis pataikys. $\Omega=\{\text{taip},\text{ne}\}$.

(53) Pastaba. Įprasta vieną Bernulio bandymo baigtį vadinti „sėkme“, o kitą – „nesėkme“. Sėkmės tikimybę įprastai žymime p, o nesėkmės – q. Žinoma, kadangi $p+q=1$, tai $q=1-p$.

(54) Apibrėžtis. Jei nepriklausomai vieną nuo kito n kartų kartojame tą patį Bernulio bandymą, tai tokią bandymų seką vadiname **Bernulio schema**.

(55) Pavyzdys. Metame standartinę monetą iš eilės du kartus ir stebime, kuria puse kiekvieną kartą moneta atvirs. Galime šį bandymą suvokti kaip dviejų Bernulio bandymų „metama viena moneta ir stebima kuria puse ji atvirs“ seką. Šią seką galime vadinti Bernulio schema.

(56) Pavyzdys. Maiše dešimt kamuoliukų: penki raudoni ir penki žali. Nežiūrėdami traukiame vieną ir stebime, ar kamuoliukas raudonas. Kamuoliuko negrąžinę į maišą traukiame antrą kamuoliuką ir stebime, ar ištrauktas kamuoliukas yra raudonas. Abu aprašyti bandymai yra Bernulio bandymai, kadangi abiem atvejais $\Omega=\{\text{taip},\text{ne}\}$. Tačiau šie bandymai nesudaro Bernulio schemos, kadangi jie nėra vienodi (tikimybė ištraukti raudoną kamuoliuką antrame bandyme pasikeičia) ir nėra nepriklausomi.

(57) Pavyzdys. Krepšininkas, kuris pataiko 80% metimų nuo baudų linijos, keturis kartus meta baudos metimą (tokiu pačiu taiklumu kiekvieną kartą). Sėkmės tikimybė vieno metimu metu $p=0{,}8$. Nesėkmės: $q=1-p=0{,}2$. Vienas metimas – Bernulio bandymas. Keturi metimai – Bernulio schema. Užrašykime visas galimas bandymo baigtis:

$$\begin{aligned}\Omega=\{&SSSS,\\ &SSSN,SSNS,SNSS,NSSS,\\ &SSNN,SNSN,NSSN,SNNS,NSNS,NNSS,\\ &SNNN,NSNN,NNSN,NNNS,\\ &NNNN\}.\end{aligned}$$

Kadangi visi atskiri metimai vienas nuo kito nepriklausomi, tai pvz. $P(SSNS)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}8^3\cdot 0{,}2^1$.

Tegul a. d. X – krepšininko pataikytų metimų skaičius. Tuomet

$$\begin{aligned}
P(X=4) &= P(\{SSSS\}) = 0{,}8^4 \\
P(X=3) &= P(\{SSSN, SSNS, SNSS, NSSS\}) = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 \\
P(X=2) &= P(\{SSNN, SNSN, NSSN, SNNS, NSNS, NNSS\}) = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 \\
P(X=1) &= P(\{SNNN, NSNN, NNSN, NNNS\}) = 4 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 \\
P(X=0) &= P(\{NNNN\}) = 0{,}2^4
\end{aligned}$$

Pagalvokime, kaip atsirado skaičiai $4, 6, 4$. Ogi iš to, keliais būdais iš 4 raidžių galime parinkti vieną S, dvi S arba tris S, t. y. $4 = C_4^3, 6 = C_4^2, 4 = C_4^1$. Taigi šią situaciją galėtume apibendrinti taip: $P(X = m) = C_4^m \cdot 0{,}8^m \cdot 0{,}2^{4-m}$. O dar bendresniu atveju (galioja Bernulio schemai, kai bandymą su sėkmės tikimybe p kartojame n kartų): $P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$.

(58) Apibrėžtis. Tarkime Bernulio bandymą, su sėkmės tikimybe p $(0 < p < 1)$, kartojame n kartų nepriklausomai vieną nuo kito. Tegul atsitiktinis dydis X – gautų sėkmių skaičius. Tuomet atsitiktinį dydį X vadinsime **binominiu** arba **binomiškai pasiskirsčiusiu**.

(59) Teiginys. Tegul X yra binominis atsitiktinis dydis, nurodantis sėkmių skaičių Bernulio bandymų sekoje, kur vieno bandymo sėkmė yra p, o bandymas kartojamas n kartų. Tuomet $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.
Įrodymas. Tikiuosi, pakankamai aišku iš aukščiau aptarto pavyzdžio.

(60) Pastaba. Sprendžiant uždavinius ir pastebėjus, kad turime Bernulio schemą, juos galime spręsti naudodami aukščiau pateiktą teiginį.

(61) Pavyzdys. 2025 m. VBE A kurso bandomojo egzamino 19 uždavinys.

19. Benas neseniai pradėjo dirbti kalviu. Jam gaminant metalinę detalę, tikimybė, kad pagaminta detalė bus netinkama, yra dvigubai didesnė už tikimybę, kad pagaminta detalė bus tinkama. Benas pagamino 8 metalines detales. Apskaičiuokite tikimybę, kad tarp pagamintų detalių bus bent 3 tinkamos.

Sprendimas. Pagal sąlygą suprantame, kad aštuonis kartus nepriklausomai vienas nuo kito bus atliekamas tas pats Bernulio bandymas su dvigubai mažesne sėkmės tikimybe. Pažymėkime vieno Bernulio bandymo sėkmės tikimybę p, o nesėkmės – q. Tuomet turime $p + q = 1 \Longrightarrow p + 2p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$. Tegul X – tinkamų detalių skaičius. Tuomet turime $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X=2) + P(X=1) + P(X=0))$. Kadangi X yra binomiškai pasiskirstęs, tai

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= C_8^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 28 \cdot \frac{64}{6561} \\
P(X=1) &= C_8^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 8 \cdot \frac{128}{6561} \\
P(X=0) &= C_8^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1 \cdot \frac{256}{6561} \\
P(X \geqslant 3) &= 1 - (P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)) \\
&= 1 - \left(28 \cdot \frac{64}{6561} + 8 \cdot \frac{128}{6561} + 1 \cdot \frac{256}{6561}\right) \\
&= 1 - \frac{1792 + 1024 + 256}{6561} \\
&= \frac{3489}{6561} = \frac{1163}{2187}
\end{aligned}$$

(62) Pavyzdys. Uždavinys iš uždavinyno 12 kl. (Autorius V. Stakėnas, Leidėjas: TEV, 2004 m., ISBN: 9955491701, 57 psl.)

32. Matematikos žinių patikrinimo teste yra 4 klausimai. Duoti kiekvieno klausimo 5 atsakymai, iš kurių vienas teisingas. Mokinys atsakymus renkasi atsitiktinai. Tegu X — teisingai pasirinktų atsakymų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$, $\sigma(X)$.

Sprendimas. Pagal sąlygą suprantame, kad keturis kartus nepriklausomai vienas nuo kito bus atliekamas tas pats Bernulio bandymas. Sėkmės tikimybė $p = \frac{1}{5}$, o nesėkmės: $q = \frac{4}{5}$. Galėtume a. d. X skirstinį sudaryti taip, kaip ankstesniame pavyzdyje, tačiau susipažinkime ir su kitokiu sprendimu. Vienetą pakelsime ketvirtuoju laipsniu ir pasinaudosime Niutono binomo formule.

$$1^4 = (p+q)^4 = C_4^0 p^4 q^0 + C_4^1 p^3 q^1 + C_4^2 p^2 q^2 + C_4^3 p^1 q^3 + C_4^4 p^0 q^4$$

Atkreipkime dėmesį, kad kiekvienas gautas narys yra lygus tikimybė, kad X įgys tam tikrą reikšmę, pvz. antrasis narys $C_4^1 p^3 q^1$ yra lygus tikimybei $P(X=3)$. Tai pastebėję tęskime:

$$\begin{aligned}
1^4 = (p+q)^4 &= C_4^0 p^4 q^0 + C_4^1 p^3 q^1 + C_4^2 p^2 q^2 + C_4^3 p^1 q^3 + C_4^4 p^0 q^4 \\
&= 1\left(\tfrac{1}{5}\right)^4\left(\tfrac{4}{5}\right)^0 + 4\left(\tfrac{1}{5}\right)^3\left(\tfrac{4}{5}\right)^1 + 6\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + 4\left(\tfrac{1}{5}\right)^1\left(\tfrac{4}{5}\right)^3 + 1\left(\tfrac{1}{5}\right)^0\left(\tfrac{4}{5}\right)^4 \\
&= \frac{1}{625} + \frac{16}{625} + \frac{96}{625} + \frac{256}{625} + \frac{256}{625} \\
&= P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)
\end{aligned}$$

Taigi, a. d. X skirstinys yra toks:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

Tuomet

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 0\cdot\frac{256}{625} + 1\cdot\frac{256}{625} + 2\cdot\frac{96}{625} + 3\cdot\frac{16}{625} + 4\cdot\frac{1}{625} = \frac{256+192+48+4}{625} = \frac{500}{625} = 0{,}8 \\
\mathbf{D}X &= \left(0-0{,}8\right)^2\cdot\tfrac{256}{625} + \left(1-0{,}8\right)^2\cdot\tfrac{256}{625} + \left(2-0{,}8\right)^2\cdot\tfrac{96}{625} + \left(3-0{,}8\right)^2\cdot\tfrac{16}{625} + \left(4-0{,}8\right)^2\cdot\tfrac{1}{625} \\
&= 0{,}64\cdot\tfrac{256}{625} + 0{,}04\cdot\tfrac{256}{625} + 1{,}44\cdot\tfrac{96}{625} + 4{,}84\cdot\tfrac{16}{625} + 10{,}24\cdot\tfrac{1}{625} \\
&= \ldots \\
&= 0{,}64 \\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8
\end{aligned}$$